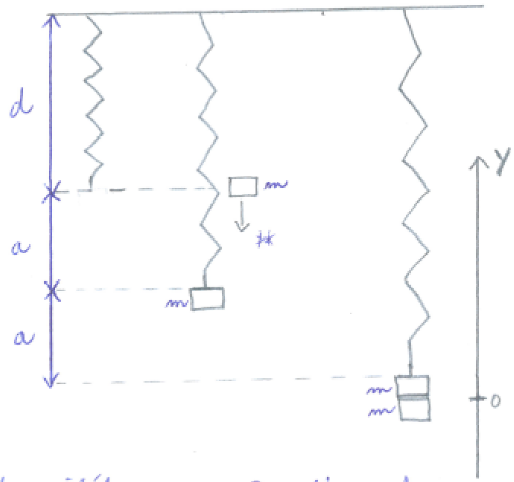
(1)



← rovnovážná poloha dvojitého závaží

• tuhost pružiny

$$mg = ka$$

$$k = \frac{mg}{a}$$

• harmonický oscilátor: $2m\ddot{y} = -ky$

$*\quad \ddot{x} = -\omega^2 x$

$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$

$$\omega^2 = \frac{k}{2m}$$

a)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \sqrt{\frac{g}{2a}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

• počáteční podmínky: $y(0) = a$

$v(0) = -v_0$

$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \delta)$

** PRUŽNÁ SRÁŽKA ... ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

$$\underset{\text{hybnost před}}{mv} = \underset{\text{hybnost po}}{2mv_0} \quad \Rightarrow v_0 = \tfrac{1}{2}v$$

$$s = a = \tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

$$v = g\cdot t = \sqrt{2ag}$$

$$v_0 = \tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{ag}{2}}$$

$$y(0) = a = A\sin\delta \qquad \Rightarrow \quad a = A\sin\delta \qquad (1)$$

$$v(0) = -\sqrt{\frac{ag}{2}} = A\sqrt{\frac{g}{2a}}\cos\delta \qquad \Rightarrow \quad -a = A\cos\delta \qquad (2)$$

$$(1):(2) \rightarrow \quad -1 = \operatorname{tg}\delta$$

$$\Rightarrow \delta = -\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$$

$$x(0) = A \cdot \sin \delta = a$$

$$\underbrace{A \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\sin(-\frac{\pi}{4})} = a \qquad \Rightarrow A = -\sqrt{2}\,a$$

dohromady $y(t) = -\sqrt{2}\,a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $v(t) = -\sqrt{2}a \sqrt{\frac{g}{2a}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$

- potenciální energie $E_p = \frac{1}{2} k y^2$

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{mg}{a} \, 2a^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$$

c) $E_p = mga \sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$

- kinetická energie $E_k = \frac{1}{2} \cdot 2m v^2$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 2a^2 \frac{g}{2a} \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$$

c) $E_k = mga \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$

- celková energie $E = E_p + E_k$

c) $E = mga$

$= E_0$ ... počáteční energie závaží 1. před upuštěním na závaží 2.

(2)

- součet funkcí sinus / kosinus

→ součtové vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\Rightarrow \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ x-y &= b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2} \\ y &= \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ x-y &= b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2} \\ y &= \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

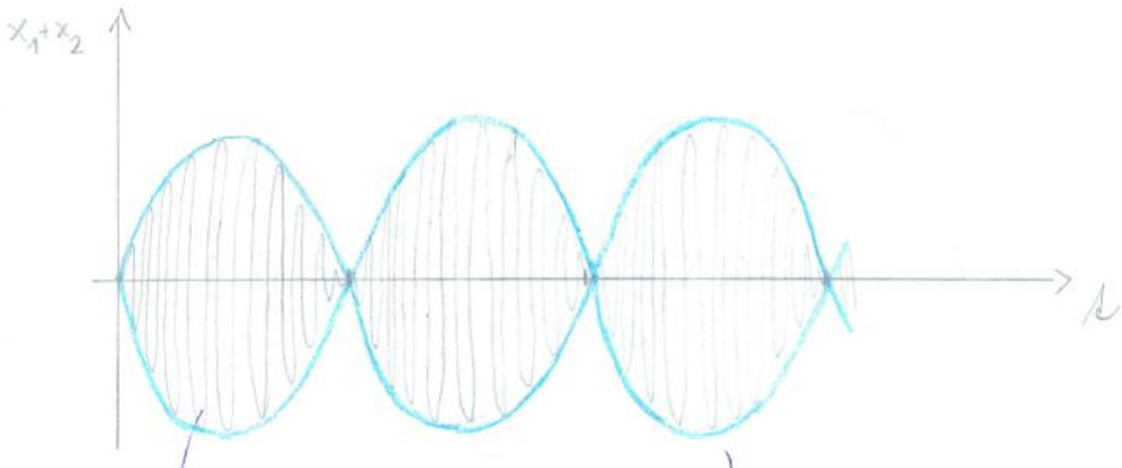
$$\underline{\underline{\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}}$$

- součet 2 kmitů ve fázi (!) + se stejnou amplitudou

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right)$$
$$= 2 \sin\left(2\pi \frac{f_1+f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1-f_2}{2} t\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\bar{f} = \frac{f_1+f_2}{2} \qquad \tilde{f} = \frac{f_1-f_2}{2}$$



harmonické kmity
s průměrnou frekvencí $\bar{f}$

$$\bar{f} = \frac{f_1+f_2}{2} = 437{,}5\ Hz$$

modulace amplitudy → ZÁZNĚJE
s frekvencí $2\tilde{f}$

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{1}{2\tilde{f}} = \frac{1}{f_1-f_2} = 0{,}2\ s$$

(3)

Příklad 7.10

rovnováha

$$F_{od} = F_s$$

odstředivá síla

třecí síla

$$\vec{F}_{od} = -m\vec{\omega}(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

kolotoč: $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ $\Rightarrow F_{od} = m\omega^2 r$

leží v rovině

$\parallel$ osou

$$\omega = 2\pi/T$$

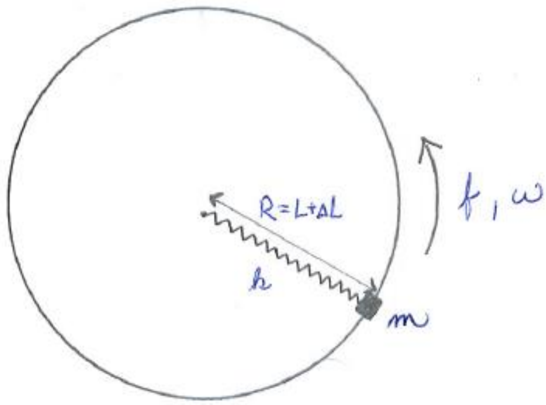
$T = 6\,s$ (=> za $10T = 60\,s$ 10 otoček)

$$F_s = F_n \cdot \mu_s$$

$$F_s = mg\mu_s$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{r}{g}\frac{4\pi^2}{T^2} = \underline{0{,}56}$$

(4)



1. z pohledu <u>inerciální</u> vztažné soustavy (pevný konec pružiny)

- závaží koná rovnoměrný kruhový pohyb, působí na něj tudíž <u>dostředivá</u> síla F_d která je dána silou pružnosti F_k

- $F_d = F_k$

$$F_d = m\frac{v^2}{R} \underset{\substack{\uparrow \\ v=\omega R}}{=} m\omega^2 R \underset{\substack{\uparrow \\ R=L+\Delta L \\ \omega = 2\pi f}}{=} 4\pi^2 f^2 m\,(L+\Delta L)$$

$$F_k = k\cdot\Delta L$$

- dohromady: $$k\cdot\Delta L = 4\pi^2 f^2 m\,(L+\Delta L)$$

$$\Delta L = \frac{4\pi^2 f^2 m L}{k - 4\pi^2 f^2 m}$$

$$\Delta L = L\cdot\frac{1}{\frac{k}{4\pi^2 f^2 m} - 1} \underset{\substack{\uparrow \\ k = 200\ \mathrm{kg\,s^{-2}} \\ f = 5\ \mathrm{s^{-1}} \\ m = 0{,}1\ \mathrm{kg} \\ L = 10\ \mathrm{cm}}}{=} 9{,}7\ \mathrm{cm}$$

2. z pohledu neinerciální vztažné soustavy (závaží)

- závaží je v klidu, výslednice působících sil je nulová, velikost odstředivé síly F_{od} je rovna velikosti síly pružnosti F_k

- $F_{od} = F_k$

$\vec{F}_{od} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

- vektor úhlové rychlosti je kolmý na rovinu, v níž se otáčí závaží, platí:

$\vec{\omega} \perp \vec{r}$

$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad u = \omega R$

$\vec{u} \perp \vec{\omega}, \vec{r}$

$\vec{w} = \vec{\omega} \times \vec{u} \quad \Rightarrow \quad w = \omega u = \omega^2 R$

$F_{od} = m w = m\omega^2 R$

$F_{od} = 4\pi^2 f^2 m (L + \Delta L)$

$F_k = k \cdot \Delta L$

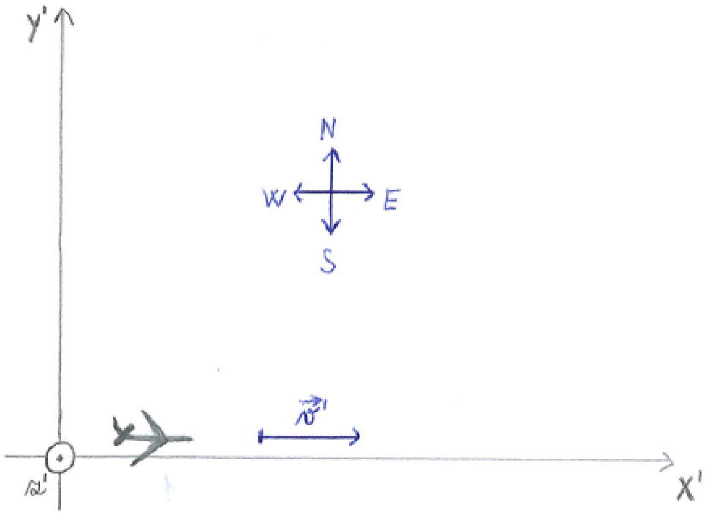
- dohromady: $k \cdot \Delta L = 4\pi^2 f^2 m (L + \Delta L)$

- stejná rovnice => stejný výsledek

$$\Delta L = L \frac{1}{\frac{k}{4\pi^2 f^2 m} - 1} = 9{,}7\,\text{cm}$$

(5)

• neinerciální vztažná soustava (Země)



x' ... směr východ

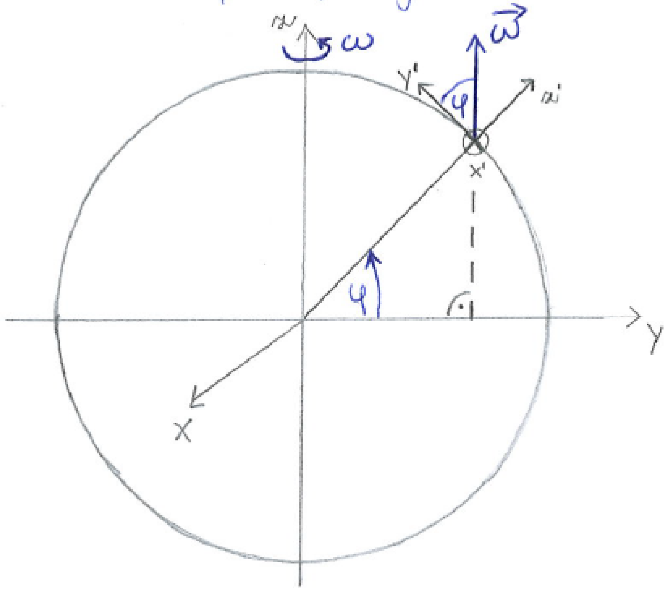
y' ... směr sever

z' ... svislý směr vzhůru

$\vec{v}' = (v', 0, 0)$ - rychlost letadla vůči zemskému povrchu

→ tak, jak ji vnímáme ze země

• inerciální vztažná soustava (vesmír, stálice, hvězdy ...)



- vektor úhlové rychlosti je rovnoběžný se zemskou osou a míří směrem od jižního k severnímu pólu

$$\Rightarrow \vec{\omega}_{IS} = (0, 0, \omega)$$

↳ inerciální soustava (x, y, z)

- z obrázku: $\vec{\omega}_{NIS} = (0, \omega \cos\varphi, \omega \sin\varphi)$

↳ neinerciální soustava (x', y', z')

- Coriolisova síla: $\vec{F}_C = -2m\, \vec{\omega} \times \vec{v}'$ ... v neinerciální vztažné soustavě

$$\vec{F}_C = -2m\,\omega\, v' \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_C = -2m\,\omega\, v' \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

- perioda otáčení: $T = 1\,\text{den}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \vec{F}_C = \frac{4\pi m v'}{T} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5580\,N \\ 4670\,N \end{pmatrix}$$

- letadlo je zanášeno směrem na jih silou 5580 N
- letadlo je nadnášeno silou 4670 N

- pro srovnání tíhová síla působící na letadlo má velikost přibližně $2 \cdot 10^6\,N$

↳ cca 400x vyšší síla